Exercice 1 : comparaison des nombres :

- On a : $\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27 \quad et \quad \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$

  $\left(3\sqrt{3}\right)^2 \leq \left(4\sqrt{2}\right)^2$

  Et puisque les nombres $3\sqrt{3}$ et $4\sqrt{2}$ sont positifs, alors $3\sqrt{3} \leq 4\sqrt{2}$

- On a : $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 12 \quad et \quad \left(-3\sqrt{2}\right)^2 = 18$

  $\left(-2\sqrt{3}\right)^2 \leq \left(-3\sqrt{2}\right)^2$

  Et puisque les nombres $-2\sqrt{3}$ et $-3\sqrt{2}$ sont négatifs, alors $-2\sqrt{3} \geq -3\sqrt{2}$

- On a : $\left(3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3 \quad et \quad \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$

  $\left(3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2$

  Et puisque les nombres $3\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $\frac{\sqrt{7}}{3}$ sont positifs, alors $3\sqrt{\frac{1}{3}} \geq \frac{\sqrt{7}}{3}$

- On a : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2 = 7+2\sqrt{6} \quad et \quad \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 = 5+2\sqrt{6}$

  $\left(1+\sqrt{6}\right)^2 \geq \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

  Et puisque les nombres $1+\sqrt{6}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ sont positifs, alors $1+\sqrt{6} \geq \sqrt{3}+\sqrt{2}$

- On a : $\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^2 = 13-2\sqrt{22} \quad et \quad \left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$

  $\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{13}\right)^2$

  Et puisque les nombres $\sqrt{11}-\sqrt{2}$ et $\sqrt{13}$ sont positifs, alors $\sqrt{11}-\sqrt{2} \leq \sqrt{13}$

- On a : $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 3+2\sqrt{2} \quad et \quad \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2$

  $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^2$

  Et puisque les nombres $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$ et $\left(\sqrt{2}+1\right)$ sont positifs, alors :

  $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \leq \left(\sqrt{2}+1\right)$

- On a : $\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 4-2\sqrt{3} \quad et \quad \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = 4-2\sqrt{3}$

  $\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$

  Et puisque les nombres $\sqrt{3}-1$ et $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ sont positifs, alors $\sqrt{3}-1 = \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Exercice 2 :

1. Effectuons la différence.

- $$\frac{4}{x+y} - \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = \frac{4}{x+y} - \frac{x+y}{xy}$$

$$= \frac{4xy-(x+y)^2}{xy(x+y)} = \frac{4xy-(x^2+2xy+y^2)}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{-x^2+2xy-y^2}{xy(x+y)} = \frac{-(x^2-2xy+y^2)}{xy(x+y)}$$

$$= \frac{-(x-y)^2}{xy(x+y)}$$

Nous avons : $(x-y)^2 > 0$; $xy > 0$ *et* $(x+y) > 0$

Donc : $\frac{-(x-y)^2}{xy(x+y)} < 0$

Par conséquent : $\frac{4}{x+y} \leq \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

- $$\frac{x+3y}{3y} - \frac{4x}{x+3y} = \frac{(x+3y)^2-3y\times 4x}{3y(x+3y)}$$

$$= \frac{x^2+6xy+9y^2-12xy}{3y(x+3y)} = \frac{x^2-6xy+9y^2}{3y(x+3y)}$$

$$= \frac{(x-3y)^2}{3y(x+3y)}$$

Nous avons : $(x-3y)^2 > 0$; $3y > 0$ *et* $x+3y > 0$

Donc : $\frac{(x-3y)^2}{3y(x+3y)} > 0$

Par conséquent : $\frac{x+3y}{3y} \geq \frac{4x}{x+3y}$

2. Effectuons la différence.

$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c)-a(b+c)}{b(b+c)}$$

$$= \frac{ba+bc-ab-ac}{b(b+c)} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)}$$

Nous avons : $c > 0$; $b > 0$; $b-a < 0$ *et* $b+c > 0$

Donc : $\frac{c(b-a)}{b(b+c)} < 0$ par conséquent : $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$

Exercice 3 :

- On a : $2+\frac{1}{2} \le x+y \le 3+\frac{5}{4}$

  Donc : $\frac{5}{2} \le x+y \le \frac{17}{4}$

- On a : $2 \le x \le 3$ et $\frac{-5}{4} \le -y \le \frac{-1}{2}$

  Donc : $2 + \left(\frac{-5}{4}\right) \le x + (-y) \le 3 + \left(\frac{-1}{2}\right)$

  $$\frac{3}{4} \le x-y \le \frac{5}{2}$$

- On a : $2\times\frac{1}{2} \le x\times y \le 3\times\frac{5}{4}$

  Donc : $1 \le xy \le \frac{15}{4}$

- On a : $1 \le \frac{1}{2}x \le \frac{3}{2}$ et $1 \le 2y \le \frac{5}{2}$

  Donc : $1 + 1 \le \frac{1}{2}x + 2y \le \frac{3}{2} + \frac{5}{2}$

  $$2 \le \frac{1}{2}x + 2y \le 4$$

Exercice 4 : $-1 \le x \le \frac{-1}{2}$ *et* $2 \le y \le 5$

- On a : $-1 + 2 \le x + y \le \frac{-1}{2} + 5$

  $$1 \le x + y \le \frac{9}{2}$$

- On a : $-1 \le x \le \frac{-1}{2}$ et $-5 \le -y \le -2$

  Donc : $-1 + (-5) \le x + (-y) \le \frac{-1}{2} + (-2)$

  $$(-6) \le x - y \le \frac{-5}{2}$$

- On a : $\frac{1}{2} \le -x \le 1$ et $2 \le y \le 5$

  Donc : $\frac{1}{2} \times 2 \le -x \times y \le 1 \times 5$

  $$1 \le -xy \le 5$$

  Par conséquent : $-5 \le xy \le -1$

- On a : $\frac{1}{2} \le -x \le 1$ et $\frac{1}{5} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

  Donc : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \le -x \times \frac{1}{y} \le 1 \times \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{10} \leq \frac{-x}{y} \leq \frac{1}{2}$$

D'où : $$\frac{-1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{-1}{10}$$

- On a : $1 \leq x + y \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2} \leq -(x - y) \leq 6$

$$\frac{5}{2} \leq -x + y \leq 6 \quad \text{et} \quad \frac{1}{6} \leq \frac{1}{-x + y} \leq \frac{2}{5}$$

Donc : $$1 \times \frac{1}{6} \leq (x + y)\times\frac{1}{-x + y} \leq \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{6} \leq \frac{x + y}{-x + y} \leq \frac{1}{5}$$

- On a : $\frac{1}{2} \leq -x \leq 1$ et $4 \leq y^2 \leq 25$

Donc : $$\frac{1}{2} + 4 \leq -x + y^2 \leq 1 + 25$$

$$\frac{9}{2} \leq -x + y^2 \leq 26$$

Exercice 5 :

- On a : $$3 \leq \frac{2b + 1}{3} \leq 5$$

  Donc : $$3\times3 \leq 3\times\frac{2b + 1}{3} \leq 3\times5$$

$$9 \leq 2b + 1 \leq 15$$

$$9 - 1 \leq 2b + 1 - 1 \leq 15 - 1$$

$$8 \leq 2b \leq 14$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \leq \frac{1}{2} \times 2b \leq \frac{1}{2} \times 14$$

D'où : $$4 \leq b \leq 7$$

- On a : $4 \leq 2a \leq 6$ et $4 \leq b \leq 7$

  Donc : $$4 + 4 \leq 2a + b \leq 6 + 7$$

$$8 \leq 2a + b \leq 13$$

- On a : $2 \leq a \leq 3$ et $-7 \leq -b \leq -4$

  Donc : $$2 +(-7) \leq a + (-b) \leq 3 + (-4)$$

  D'où : $$-5 \leq a - b \leq -1$$

- On a : $2 \leq a \leq 3$ et $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{4}$

  Donc : $$2 \times \frac{1}{7} \leq a \times \frac{1}{b} \leq 3 \times \frac{1}{4}$$

  D'où : $$\frac{2}{7} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{4}$$

Exercice 6 :

1. On a : $-1 \leq b - 2 \leq 1$

Donc : $-1 + 2 \leq b - 2 + 2 \leq 1 + 2$

D'où : $1 \leq b \leq 3$

2.

On a : $\frac{1}{2} + 1 \leq a + b \leq \frac{3}{2} + 3$

$$\frac{3}{2} \leq a + b \leq \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \leq a \times b \leq \frac{3}{2} \times 3$$

$$\frac{1}{2} \leq ab \leq \frac{9}{2}$$

$$\frac{-9}{2} \leq -ab \leq \frac{-1}{2}$$

Donc : $\frac{3}{2} + \left(\frac{-9}{2}\right) \leq a + b + (-ab) \leq \frac{9}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right)$

$$-3 \leq a + b + -ab \leq 4$$

3. on a **:** $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$ et $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b} \leq 1$

Donc : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \leq a \times \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2} \times 1$

$$\frac{1}{6} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3}{2}$$

$$1 \leq \frac{6a}{b} \leq 9$$

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{\frac{6a}{b}} \leq \sqrt{9}$$

Par conséquent : $1 \leq \sqrt{\frac{6a}{b}} \leq 3$

Prof: ATMANI NAJIB **CORRECTION: SERIE N°2: Ordre** **http://www.xriadiat.com**

Exercice 1 : $\frac{3}{7} < x < \frac{1}{2} \quad et \quad \frac{4}{3} < y < 4$

- On a : $\frac{3}{7} \times \frac{4}{3} < x \times y < \frac{1}{2} \times 4$

  Donc : $\frac{4}{7} < xy < 2$

- On a : $\frac{3}{7} < x < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{3}{4}$

  Donc : $\frac{3}{7} \times \frac{1}{4} < x \times \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$

  $\frac{3}{28} < \frac{x}{y} < \frac{3}{8}$

- On a : $\frac{4}{3} < y < 4$ et $\frac{-1}{2} < -x < \frac{-3}{7}$

  Donc : $\frac{4}{3} + \left(\frac{-1}{2}\right) < y + (-x) < 4 + \left(\frac{-3}{7}\right)$

  $\frac{1}{2} < y - x < \frac{25}{7}$

Exercice 2 :

- On a : $-3 < x < -2 \quad et \quad -5 < y < -1$

  Donc : $-2 \times (-1) < x \times y < -3 \times (-5)$

  $2 < xy < 15$

- On a : $-3 < x < -2 \quad et \quad -1 < \frac{1}{y} < \frac{-1}{5}$

  Donc : $-2 \times \left(\frac{-1}{5}\right) < x \times \frac{1}{y} < -3 \times (-1)$

  $\frac{2}{5} < \frac{x}{y} < 3$

- On a : $-3 < x < -2 \quad et \quad 1 < -y < 5$

  Donc : $-3 + 1 < x + (-y) < -2 + 5$

  $-2 < x - y < 3$

Exercice 3 :

$$2<a<3 \quad et \quad -3<b<-2 \quad et \quad 2a-c=3b$$

1.

- On a : $4 < 2a < 6$ et $-3 < b < -2$

  Donc : $4+(-3) < 2a+b < 6+(-2)$

  $1 < 2a+b < 4$

- On a : $2^2 < a^2 < 3^2$

  Donc : $4 < a^2 < 9$

- On a : $(-2)^2 < b^2 < (-3)^2$

  Donc : $4 < b^2 < 9$

- On a : $4 < 2a < 6$ et $6 < -3b < 9$

  Donc : $4+6 < 2a+(-3b) < 6+9$

  $10 < 2a-3b < 15$

2. On a : $2a-c=3b$ donc : $c=2a-3b$

   D'où : $10 < c < 15$

Exercice 4 :

1. Comparaison :

   On a : $\left(2\sqrt{7}\right)^2 = 28 \quad et \quad \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27$

   $\left(2\sqrt{7}\right)^2 > \left(3\sqrt{3}\right)^2$

   Et puisque $2\sqrt{7} \quad et \quad 3\sqrt{3}$ sont positifs, alors : $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

2. Calcul : $\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2-2\times3\sqrt{3}\times2\sqrt{7}+\left(2\sqrt{7}\right)^2$

   $= 27-12\sqrt{21}+28$

   $= 55-12\sqrt{21}$

3. Simplification : $x = \sqrt{55-12\sqrt{21}} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2} = 2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$

   $\left(car \quad 2\sqrt{7}>3\sqrt{3}\right)$

4. Encadrement :

   On a : $5,2<2\sqrt{7}<5,4 \quad et \quad -5,4<-3\sqrt{3}<-5,1$

   Donc : $5,2+(-5,4)<2\sqrt{7}+\left(-3\sqrt{3}\right)<5,4+(-5,1)$

   $-0,2 < 2\sqrt{7}-3\sqrt{3} < 0,3$

Exercice 5 :

1.

- On a : $-5 < x < -4 \quad et \quad 1 < -y < \frac{3}{2}$

  Donc : $-5+1 < x+(-y) < -4+\frac{3}{2}$

  $$-4 < x-y < \frac{-5}{2}$$

- On a : $-5+\left(\frac{-3}{2}\right) < x+y < -4+(-1)$

  $$\frac{-13}{2} < x+y < -5$$

2. Déduction : on a : $\frac{-1}{5} < \frac{1}{x+y} < \frac{-2}{13}$ et $-4 < x-y < \frac{-5}{2}$

   Donc : $\left(\frac{-5}{2}\right)\times\left(\frac{-2}{13}\right) < (x-y)\times\frac{1}{x+y} < (-4)\times\left(\frac{-1}{5}\right)$

   $$\frac{5}{13} < \frac{x-y}{x+y} < \frac{4}{5}$$

EX1 effectuons la différence :

$$A - B = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

Or : $(a-b)^2 > 0 \quad et \quad (a+b) > 0$

Donc : $\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)} > 0$

Par conséquent : $A > B$

EX2

$$-4 < x < -2 \quad et \quad -3 < y < -2$$

1. Encadrement :
   - On a : $-4+(-3) < x+y < -2+(-2)$

     Donc : $-7 < x+y < -4$
   - On a : $-4 < x < -2$ et $2 < -y < 3$

     Donc : $-4+2 < x+(-y) < -2+3$

     $-2 < x-y < 1$
   - On a : $-6 < 2y < -4$ et $6 < -3x < 12$

     Donc : $-6+6 < 2y+(-3x) < -4+12$

     $0 < 2y-3x < 8$

2. Encadrement :
   - On a : $4 < x^2 < 16$ et $4 < y^2 < 9$

     $-9 < -y^2 < -4$

     Donc : $4+(-9) < x^2+(-y^2) < 16+(-4)$

     $-5 < x^2 - y^2 < 12$
   - On a : $3 < x+7 < 5$ et $8 < y^2+4 < 13$

     $\dfrac{1}{13} < \dfrac{1}{y^2+4} < \dfrac{1}{8}$

Donc : $3\times\frac{1}{13} < (x+7)\times\frac{1}{y^2+4} < 5\times\frac{1}{8}$

$$\frac{3}{13} < \frac{x+7}{y^2+4} < \frac{5}{8}$$

- On a : $8 < 2y^2 < 18$ et $2 < -x < 4$

  Donc : $8+2 < 2y^2+(-x) < 18+4$

  $$10 < 2y^2-x < 22$$

  $$10-3 < 2y^2-x-3 < 22-3$$

  D'où : $7 < 2y^2-x-3 < 19$

EX3

$$-5 < x < -2 \quad et \quad 2x-y = -1$$

1. Encadrement :
   - On a : $2x-y = -1$ équivalent à $y = 2x + 1$

     Donc : $-10 < 2x < -4$

     $$-10+1 < 2x+1 < -4+1$$

     $$-9 < y < -3$$
   - On a : $9 < y^2 < 81$ et $4 < x^2 < 25$

     $$-25 < -x^2 < -4$$

     Donc : $9+(-25) < y^2+(-x^2) < 81+(-4)$

     $$-16 < y^2-x^2 < 77$$
   - On a : $-2\times(-3) < x\times y < -5\times(-9)$

     $$6 < xy < 45$$
   - On a : $2 < x+7 < 5$ et $3 < -y < 9$

     Donc : $2\times3 < -y\times(x+7) < 5\times9$

     $$6 < -y(x+7) < 45$$

   Par conséquent : $-45 < y(x+7) < -6$

2. Calcul de la valeur du nombre A :

   On a $-6 < x-1 < -3$ donc $x-1$ est négatif.

   On a $2 < y+11 < 8$ donc $y+11$ est positif.

   D'où :

   $$A = 2\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(y+11)^2}+5$$

   $$A = 2(1-x)+(y+11)+5$$

   $$A = -2x+y+18$$

   $$A = -(2x-y)+18$$

   $$A = -(-1)+18 \qquad A = 19$$

EX4

Montrons que : $-2 < xy < 1$

- On a : $1 < \sqrt{2x+3} < 2$

  Donc : $1^2 < \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 < 2^2$

  $1 < 2x+3 < 4$

  $-2 < 2x < 1$

  $-1 < x < \frac{1}{2}$

- On a : $-2 < 4-3y < 1$

  Donc : $-6 < -3y < -3$

  $1 < y < 2$

On remarque que x est compris entre un négatif et un positif.
Il y a deux cas :

- Si $-1 < x < 0$ et $1 < y < 2$

  Alors : $-2 < xy < 0$

- Si $0 < x < \frac{1}{2}$ et $1 < y < 2$

  Alors $0 < xy < 1$

Conclusion : $-2 < xy < 1$

EX5

$$x \geq \frac{1}{2} \ ; \ y \geq 1 \ et \ x + y = 6$$

On a :

$$\sqrt{x^2+(x-1)^2+2x(x-1)}+\sqrt{y^2+(y-2)^2+2y(y-2)} = \sqrt{\left[x+(x-1)\right]^2}+\sqrt{\left[y+(y-2)\right]^2}$$

$$= \sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$$

Or : $x \geq \frac{1}{2}$ $donc$ $2x \geq 1$ et par $suite$ $2x-1 > 0$

$y \geq 1$ $donc$ $2y \geq 2$ et par $suite$ $2y-2 > 0$

Donc : $\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2} = 2x-1 + 2y-2$

$= 2(x+y) -3$

$= 2\times 6 -3$

$= 9$

Par conséquent :

$$\sqrt{x^2+(x-1)^2+2x(x-1)}+\sqrt{y^2+(y-2)^2+2y(y-2)} = 9$$

Exercice 1 **comparaison :**

- On a : $\left(-7\sqrt{2}\right)^2 = 98 \quad et \quad \left(-5\sqrt{3}\right)^2 = 75$

  $\left(-7\sqrt{2}\right)^2 \geq \left(-5\sqrt{3}\right)^2$

  Et puisque les nombres $\left(-7\sqrt{2}\right)$ et $\left(-5\sqrt{3}\right)$ sont négatifs.

  Alors : $-7\sqrt{2} \leq -5\sqrt{3}$

- On a : $\left(-4\sqrt{5}\right)^2 = 80 \quad et \quad \left(-2\sqrt{7}\right)^2 = 28$

  $\left(-4\sqrt{5}\right)^2 \geq \left(-2\sqrt{7}\right)^2$

  Et puisque les nombres $\left(-4\sqrt{5}\right)$ et $\left(-2\sqrt{7}\right)$ sont négatifs.

  Alors : $-4\sqrt{5} \leq -2\sqrt{7}$

  D'où : $3-4\sqrt{5} \leq 3-2\sqrt{7}$

- On a : $\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50 \quad et \quad \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$

  $\left(5\sqrt{2}\right)^2 \geq \left(4\sqrt{3}\right)^2$

  Et puisque les nombres $5\sqrt{2}$ et $4\sqrt{3}$ sont positifs.

  Alors : $5\sqrt{2} \geq 4\sqrt{3}$

  D'où : $5\sqrt{2}-7 \geq 4\sqrt{3}-7$

- On a : $-3\sqrt{2} = -\sqrt{18}$ et $5 \leq 7$

  Donc : $5-3\sqrt{2} \leq 7-\sqrt{18}$

Exercice 2

❖ On a : $1 \leq \sqrt{3x-2} \leq 2$

Donc : $1^2 \leq \left(\sqrt{3x-2}\right)^2 \leq 2^2$

$1 \leq 3x-2 \leq 4$

$3 \leq 3x \leq 6$

$1 \leq x \leq 2$

❖ On a : $3 \leq 1-y \leq 4$

Donc : $2 \leq -y \leq 3$

$-3 \leq y \leq -2$

Encadrement :

- On a : $1+(-3) \leq x+y \leq 2+(-2)$
  Donc : $-2 \leq x+y \leq 0$

- On a : $1+2 \leq x+(-y) \leq 2+3$
  Donc : $3 \leq x-y \leq 5$

- On a : $1\times 2 \leq x\times(-y) \leq 2\times 3$
  $2 \leq -xy \leq 6$
  $-6 \leq xy \leq -2$

- On a : $4 \leq y^2 \leq 9$
  Et : $5 \leq y^2+1 \leq 10$
  Donc : $\dfrac{1}{10} \leq \dfrac{1}{y^2+1} \leq \dfrac{1}{5}$
  D'où : $1\times\dfrac{1}{10} \leq x\times\dfrac{1}{y^2+1} \leq 2\times\dfrac{1}{5}$
  $\dfrac{1}{10} \leq \dfrac{x}{y^2+1} \leq \dfrac{2}{5}$

Exercice 3 On a : $a+b>0$ et $3-a<0$

Donc : $E = \sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(3-a)^2} - (b-2)$

$= a+b + a-3 - (b-2)$

$= 2a - 1$

Exercice 4

1. Comparaison de a et $2\sqrt{a}-1$.

   On a : $(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0$

   Donc : $(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} + 1^2 \geq 0$

   $a - 2\sqrt{a} + 1 \geq 0$

   $a \geq 2\sqrt{a} - 1$

2. Comparaison : on calcule la différence :

$$1+\frac{2a}{7b}-\frac{8a}{7a+2b}=\frac{7b+2a}{7b}-\frac{8a}{7a+2b}$$

$$=\frac{(7b+2a)(7a+2b)-7b\times 8a}{7b(7a+2b)}=\frac{49ab+14b^2+14a^2+4ab-56ab}{7b(7a+2b)}$$

$$=\frac{49ab+14\left(a^2+b^2-2ab\right)+4ab-28ab}{7b(7a+2b)}=\frac{25ab+14(a-b)^2}{7b(7a+2b)}$$

Or : $a>0$ et $b>0$

Donc : $25ab>0$; $7b>0$; $7a+2b>0$ et $(a-b)^2>0$

Par conséquent : $\frac{25ab+14(a-b)^2}{7b(7a+2b)}>0$

Et par suite : $1+\frac{2a}{7b}>\frac{8a}{7a+2b}$

Exercice 5

On pose : $a=x^2-6x+1$ et $b=y^2-6y+1$

1. On a : $x<3$ et $y<3$

   Donc : $x+y<6$

   Par suite : $x+y-6<0$

2. On a : $a-b=\left(x^2-6x+1\right)-\left(y^2-6y+1\right)$

$$=x^2-6x-y^2+6y$$
$$=x^2-y^2+6(y-x)$$
$$=(x-y)(x+y)+6(y-x)$$
$$=(x-y)(x+y-6)$$

3. Comparaison de a et b.

   On a : $x-y<0$ et $x+y-6<0$

   Donc : $(x-y)(x+y-6)>0$

   Par conséquent : $a>b$

Exercice 6

1. On a : $\frac{-x}{2}-1 \leq x-2 \leq \frac{-x}{2}+1$

   Donc : $\frac{-x}{2}-1+\frac{x}{2} \leq x-2+\frac{x}{2} \leq \frac{-x}{2}+1+\frac{x}{2}$

   $$-1 \leq \frac{3x}{2}-2 \leq 1$$

   $$1 \leq \frac{3x}{2} \leq 3$$

   $$\frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

   On a : $1 \leq (2y-1)^2-3 \leq 6$

   Donc : $4 \leq (2y-1)^2 \leq 9$

   $$\sqrt{4} \leq \sqrt{(2y-1)^2} \leq \sqrt{9}$$

   $$2 \leq 2y-1 \leq 3$$

   $$3 \leq 2y \leq 4$$

   $$\frac{3}{2} \leq y \leq 2$$

2. Encadrement du nombre A :

   On a : $1 \leq xy \leq 4$

   Et : $1 \leq \sqrt{xy} \leq 2$

   $$-4 \leq -2\sqrt{xy} \leq -2$$

   $$1 \leq -2\sqrt{xy}+5 \leq 3$$

   $$\frac{4}{9} \leq x^2 \leq 4$$

   $$\frac{4}{9}-2 \leq x^2-y \leq 4-\frac{3}{2}$$

   $$\frac{4}{9}-2+2 \leq x^2-y+2 \leq 4-\frac{3}{2}+2$$

   $$\frac{4}{9} \leq x^2-y+2 \leq \frac{9}{2}$$

   $$\frac{2}{9} \leq \frac{1}{x^2-y+2} \leq \frac{9}{4}$$

   Donc : $1\times\frac{2}{9} \leq \left(-2\sqrt{xy}+5\right)\times\frac{1}{x^2-y+2} \leq 3\times\frac{9}{4}$

   Par suite : $\frac{2}{9} \leq \frac{-2\sqrt{xy}+5}{x^2-y+2} \leq \frac{27}{4}$

Exercice 1

On a : $\sqrt{6} < \sqrt{10}$ donc $\sqrt{6} - \sqrt{10} < 0$

$2\sqrt{4-\sqrt{15}} > 0$

Et : $a^2 = \left(\sqrt{6} - \sqrt{10}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{60} + 10$

$a^2 = 16 - 2\times\sqrt{4}\times\sqrt{15} = 16 - 4\sqrt{15}$

$a^2 = 4\left(4 - \sqrt{15}\right)$

$b^2 = \left(2\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2 = 4\left(4 - \sqrt{15}\right)$

On a : $a^2 = b^2$

Et puisque a est négatif et b est positif, alors $a = -b$

Exercice 2 simplification de A

On a : $3a + b = 4$ donc $b = 4 - 3a$

Puisque : $2 \leq a \leq 3$

Alors : $-9 \leq -3a \leq -6$

$-5 \leq 4 - 3a \leq -2$

D'où : $-5 \leq b \leq -2$

Par suite : b est négatif.

On en déduit : $A = \sqrt{4b^2} - 6\sqrt{(a+1)^2}$

$A = -2b - 6(a+1)$

$A = -2b - 6a - 6$

$A = -2(b+3a) - 6$

$A = -2\times 4 - 6$

$A = -14$

Exercice 3 encadrement de x :

On a : $-1 \leq \dfrac{-7-x}{2} \leq 1$

Donc : $-2 \leq -7-x \leq 2$

$5 \leq -x \leq 9$

Par suite : $-9 \leq x \leq -5$

Exercice 4

On a : $2 < \sqrt{a} < 3 \quad et \quad 4 < \sqrt{b} < 5$

Donc : $2^2 < \left(\sqrt{a}\right)^2 < 3^2 \quad et \quad 4^2 < \left(\sqrt{b}\right)^2 < 5^2$

$4 < a < 9 \quad et \quad 16 < b < 25$

$4 + 16 < a + b < 9 + 25$

$20 < a + b < 34$

D'où : $\sqrt{20} < \sqrt{a + b} < \sqrt{34}$

$2\sqrt{5} < \sqrt{a + b} < \sqrt{34}$

Exercice 5 Rangement des nombres :

On a : $2^{100} = \left(2^4\right)^{25} = 16^{25}$

$3^{75} = \left(3^3\right)^{25} = 27^{25}$

$5^{50} = \left(5^2\right)^{25} = 25^{25}$

Puisque : $16 < 25 < 27$

Alors : $16^{25} < 25^{25} < 27^{25}$

D'où : $2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$

Exercice 6 comparaison : on calcule la différence.

$$\frac{a}{1+\sqrt{b}} - \frac{b}{1+\sqrt{a}} = \frac{a\left(1+\sqrt{a}\right)-b\left(1+\sqrt{b}\right)}{\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}$$

$$= \frac{a+a\sqrt{a}-b-b\sqrt{b}}{\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)} = \frac{\left(a-b\right)+\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}$$

Or : $a-b < 0 \; ; \; a\sqrt{a}-b\sqrt{b} < 0$

Donc : $\left(a-b\right)+\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right) < 0$

Et : $\left(1+\sqrt{b}\right) > 0 \; ; \; \left(1+\sqrt{a}\right) > 0$

Donc : $\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{a}\right) > 0$

Alors : $$\frac{\left(a-b\right)+\left(a\sqrt{a}-b\sqrt{b}\right)}{\left(1+\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)} < 0$$

Par conséquent : $$\frac{a}{1+\sqrt{b}} < \frac{b}{1+\sqrt{a}}$$

Exercice 1

- Si : $0 < x \leq 1$

  Alors : $0 < x^2 < x$ et $0 < x < \sqrt{x}$

  Par suite : $0 < x^2 < x < \sqrt{x} \leq 1$

- Si : $x \geq 1$

  Alors : $\sqrt{x} \geq 1$; $x^2 \geq x$ *et* $x \geq \sqrt{x}$

  Par suite : $x^2 \geq x \geq \sqrt{x} \geq 1 > 0$

Exercice 2

$$2 < x < 3 \;;\; \frac{1}{2} < y < 1 \;;\; -5 < z < 5$$

1. Encadrement :

- On a : $2^2 < x^2 < 3^2$

  Donc : $4 < x^2 < 9$

- On a $0 < z^2 < 5^2$

  Donc : $0 < z^2 < 25$

- On a : $2\times\frac{1}{2} < x\times y < 3\times1$

  Donc : $1 < xy < 3$

  Par suite : $-3 < -xy < -1$

- On a : $3 < x+1 < 4$

  Donc : $\sqrt{3} < \sqrt{x+1} < 2$

- On a : $\frac{1}{4} < y^2 < 1$

  Donc : $-1 < -y^2 < -\frac{1}{4}$

  $$3-1 < 3-y^2 < 3-\frac{1}{4}$$

  $$2 < 3-y^2 < \frac{11}{4}$$

2. Comparaison de $\sqrt{x+1}$ *et* $3-y^2$

   On a : $\sqrt{3} < \sqrt{x+1} < 2$ et $2 < 3-y^2 < \frac{11}{4}$

   Donc : $\sqrt{x+1} < 3-y^2$

Exercice 3

On a : $(x-y)^2 \geq 0$

Equivalent à : $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq 2xy$

Donc : $\dfrac{1}{x^2 + y^2} \leq \dfrac{1}{2xy}$

Exercice 4

On a : $3a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$

Donc : $3a^2 = 2(c^2 - b^2)$

Puisque $3a^2 \geq 0$ alors $c^2 - b^2 \geq 0$

Donc : $c^2 \geq b^2$ et par suite $c \geq b$ (1)

Comparons a et c :

$3a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$ équivalent à : $2b^2 = 2c^2 - 3a^2$

Or : $2b^2 \geq 0$ donc : $2c^2 - 3a^2 \geq 0$

Donc : $c^2 \geq \dfrac{3}{2}a^2$

D'autre part : on a $a^2 \geq a^2$ et $\dfrac{3}{2} \geq 1$

Donc : $\dfrac{3}{2}a^2 \geq a^2$

Nous avons : $c^2 > \dfrac{3}{2}a^2$ et $\dfrac{3}{2}a^2 \geq a^2$

On en déduit : $c^2 \geq a^2$ et donc $c \geq a$ (2)

Puisque $c \geq b$ (1) et $c \geq a$ (2)

Alors : le nombre c est le **plus grand**.